EPR und Bells Theorem [1]

Seminar Mathematische Physik vom 9. November 2010
Laurin Ostermann

1 EPR über zusammengesetzte Systeme

Einstein, Podolsky und Rosen weisen in „Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?“ (1935) darauf hin, dass bei einem System, das aus zwei raumartig getrennten Teilsystemen besteht, eine Messung an Teilsystem 1 möglicherweise dazu führt, dass in Teilsystem 2 ein Zustand induziert wird, der streuungsfrei Eigenschaften annimmt, die vor der Messung mit einer Varianz behaftet waren.

EPR halten eine gespenstische Fernwirkung für unplausibel und schließen daher, dass der Zustand ρ, der in der SQT zur Charakterisierung des Systems verwendet wird, nur eine unvollständige Beschreibung sein kann. Eigenschaften, die durch weit entfernte Messungen hervorgerufen werden, müssen bereits vor der Messung vorgelegen haben, genauer:

1. *Realismuskriterium:* Wenn der Wert einer Messgröße ohne Störung des Systems ermittelt werden kann, dann ist dieser Wert ein Element der Realität.

2. *Vollständigkeitskriterium:* Eine physikalische Theorie ist genau dann vollständig, wenn jedes Element der Realität im Formalismus der Theorie dargestellt ist.

3. *Einstein-Kausalität:* Lokale Störungen, z.B. eine Messung, breiten sich nicht schneller als Licht aus.

EPR verwendeten für ihre Diskussion die Zweiteilchen-Wellenfunktion

$$\psi(x, y) = \delta(x - y - r)$$

(mit festen scharfem Teilchenabstand r). Diese eignet sich auf Grund ihrer NIcht-Normierbarkeit allerdings nicht zur Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsraums.

Bohm schlug als Alternative den Singlet-Zustand eines Systems aus zwei Spin-1/2-Teilchen, also $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, vor. Dieser ist der reine Zustand $\rho = \psi\langle\psi, \cdot\rangle$ zu einem Vektor des Typs

$$\psi = f \otimes g \otimes (e_1 \otimes e_2 \,-\, e_2 \otimes e_1)\,,$$

[1] §5.1ff. aus der VO „Das Quantenmessproblem“, G. Grübl, SS2010

wobei $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3) \setminus 0$ in weit voreinander entfernten Gebieten lokalisiert sind und (e_1, e_2) eine ONB von $\mathbb{C}^2$ ist. Dieser Zustand realisiert die Idee von EPR, Messungen in weit voneinander entfernten Gebieten zu betrachten.

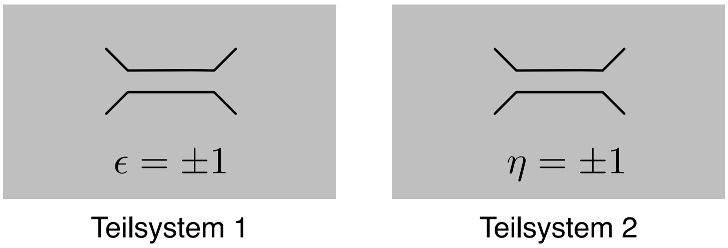

Abbildung 1: Weit voneinander entfernte Spin-Messungen

Wir werden sehen, dass bei einer Spin-Messung an einem der beiden Teilsysteme die beiden möglichen Messwerte ± 1 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_1(\epsilon) = p_2(\eta) = \frac{1}{2}$$

auftreten. Misst man hingegen an beiden Teilsystemen gleichzeitig, ergibt sich

$$p_{1,2}(\epsilon, \eta) = \frac{1 - \epsilon\eta\cos\theta}{4}$$

mit $\theta \in [0, \pi]$ dem Winkel zwischen den Richtungsvektoren der beiden Stern-Gerlach-Apparate. Damit ist sofort ersichtlich, dass die beiden Messungen (außer für den Fall $\theta = \pi/2$) nicht stochastisch unabhängig sind.

Dies führt unweigerlich auf ein Konsistenzproblem: nach der Kopenhagener Deutung entstehen die Messwerte erst im Augenblick der Messung im Bereich des Apparates durch eine zufällige Entscheidung. Für $\theta = 0$ ergibt sich aber eine strikte Antikorrelation zwischen den beiden Spin-Messungen, $p_{1,2}(\epsilon = -\eta) = 1$. Wie kann aber eine Entscheidung über η im Augenblick der Messung von ϵ mit Sicherheit fallen, wenn keine Übertragung mit Überlichtgeschwindigkeit möglich ist und der Wert von ϵ nicht schon vor der Messung feststand?

Bell und EPR sehen das als Hinweis auf die Unvollständigkeit der SQT und vermuten die Existenz weiterer, den Zustand bestimmender Größen, der sog. „verborgenen Parameter“.

2 Spinsinglett

Sei $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ und $\underline{e} = (e_1, e_2)$ sei eine ONB von $\mathbb{C}^2$. Der (reine) Dichteoperator $\rho = \chi\langle\chi, \cdot\rangle$ mit

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_2 \; - \; e_2 \otimes e_1)$$

heißt Spinsinglettt-Zustand. Die beiden Teilsysteme von Observablen

$$\{A \otimes id : A \in L_s(\mathbb{C}^2)\} \text{ und } \{id \otimes A : A \in L_s(\mathbb{C}^2)\}$$

seien in kompakten, weit voneinander entfernten Raumgebieten T und U fest lokalisiert, d.h. bis auf kleine Fehler seien die entsprechenden Stern-Gerlach-Apparate auf diese Gebiete eingeschränkt (für die Formulierung dieser Bedingung bräuchte man eigentlich noch die beiden Ortswellenfunktionen, cf. oben).

Sei $a \in \mathbb{S}^2$ und $\tilde{a} = a_1\sigma^1 + a_2\sigma^2 + a_3\sigma^3$ mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\sigma(\tilde{a}) = \{1, -1\}$. Wir betrachten nun die beiden Observablen $A = \tilde{a} \otimes id$ und $B = id \otimes \tilde{b}$ mit $[A, B] = 0 \; \forall \, a, b \in \mathbb{S}^2$ und bestimmen das iterierte W-Maß $W_\rho^{A,B}$.

Satz 1. *Sei ρ der Spinsinglett-Zustand, $A = \tilde{a} \otimes id$ und $B = id \otimes \tilde{b}$. Dann gilt mit $\cos\theta = a \cdot b$ für alle $\epsilon, \eta \in \{1, -1\}$*

$$W_\rho^{A,B}(\{(\epsilon, \eta)\}) = Sp\left(P_\epsilon^A P_\eta^B \rho\right) = \frac{1 - \epsilon\eta\cos\theta}{4}.$$

Beweis. Mit der Abkürzung $\langle A \rangle = Sp(A\rho)$ und $P_\epsilon^{\tilde{a}} = (1 + \epsilon\tilde{a})/2$ schreiben wir

$$\begin{aligned} \left\langle P_\epsilon^A P_\eta^B \right\rangle =& \frac{1}{4} \left\langle (id + \epsilon\tilde{a}) \otimes \left(id + \eta\tilde{b}\right)\right\rangle \\ =& \frac{1}{4} \left\langle id \otimes id + \epsilon\tilde{a} \otimes id + id \otimes \eta\tilde{b} + \epsilon\tilde{a} \otimes \eta\tilde{b}\right\rangle \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die einzelnen Beiträge und erhalten

1. $\langle id \otimes id \rangle = Sp(\rho) = 1$

2. für die Mischterme

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a} \otimes id \rangle =& \frac{1}{2} \langle (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1), \; \tilde{a} \otimes id \; (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \rangle \\ =& \frac{1}{2} (\langle e_1, \tilde{a}e_1 \rangle + \langle e_2, \tilde{a}e_2 \rangle) = \frac{1}{2} Sp(\tilde{a}) = 0 \end{aligned}$$

   (analog für $\langle id \otimes \tilde{b} \rangle$)

3. und für den letzten Term

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tilde{a} \otimes \tilde{b} \right\rangle =& \frac{1}{2} \left\langle (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)\, ,\ \tilde{a} \otimes \tilde{b}\ \ (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \right\rangle \\
=& \frac{1}{2} \left(\langle e_1, \tilde{a} e_1 \rangle \langle e_2, \tilde{b} e_2 \rangle - \langle e_1, \tilde{a} e_2 \rangle \langle e_2, \tilde{b} e_1 \rangle + \left[\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b} \right| \right) \\
=& \frac{1}{2} \left(-a^3 b^3 - \left(a^1 - i a^2\right) \left(b^1 + i b^2\right) + \left[\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b} \right] \right) \\
=& \frac{1}{2} \left(-a^3 b^3 - a^1 b^1 - a^2 b^2 + i \left(a^2 b^1 - a^1 b^2\right) + \left[\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b} \right] \right) \\
=& - a \cdot b.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir

$$
\langle P^A_\epsilon P^B_\eta \rangle = \frac{1 - \epsilon\eta\, a \cdot b}{4}.
$$

□

Satz 2. *Sei ρ der Spinsinglett-Zustand, $A = \tilde{a} \otimes id$ und $B = id \otimes \tilde{b}$ mit $a, b \in \mathbb{S}^2$. Dann gilt $\langle A \rangle_\rho = \langle B \rangle_\rho = 0$, $\Delta_\rho A = \Delta_\rho B = 1$ und $\langle AB \rangle_\rho = -\cos\theta$.*

Beweis. Die Erwartungswerte sieht man bei Betrachtung der Mischterme des Beweises zu Satz 1 (Punkt 2). Die Varianzen $(\Delta_\rho A)^2 = \langle A^2 \rangle_\rho - \langle A \rangle_\rho^2$ ergeben sich aus $\tilde{a}^2 = id$ und Punkt 1 des Beweises und $\langle AB \rangle_\rho$ entspricht gerade Punkt 3. □

Wegen $\langle A \rangle_\rho = \langle B \rangle_\rho = 0$ und $\Delta_\rho A = \Delta_\rho B = 1$ stimmt $\langle AB \rangle_\rho$ mit dem Korrelationskoeffizienten

$$
\frac{\langle (A - \langle A \rangle_\rho)\, (B - \langle B \rangle_\rho) \rangle_\rho}{\Delta_\rho A \Delta_\rho B}
$$

überein.

Da die beiden Observablen A und B kommutieren, können diese gemeinsam mit zwei Stern-Gerlach-Apparaten, die im jeweiligen Gebiet fest lokalisiert sind, gemessen werden. Der Ereignisraum einer solchen Messung ist

$$
E = \{(\epsilon, \eta) : \epsilon, \eta = \pm 1\}
$$

Das entsprechende W-Maß $W_{a,b} : E \to [0, 1]$ ist durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$
p_{a,b}(\epsilon, \eta) = \frac{1 - \epsilon\eta\, a \cdot b}{4}
$$

gegeben, welches sich für $a \cdot b = \cos\theta$ zu

$$
p_\theta(\epsilon, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2) & \text{für } \epsilon = \eta \\ \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) & \text{für } \epsilon \neq \eta \end{cases}
$$

umschreiben lässt. An dieser Notation sieht man sofort

$$W_\theta(\epsilon = \pm 1) = \frac{1}{2} \qquad W_\theta(\eta = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

$$W_\theta(\epsilon = \eta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad W_\theta(\epsilon \neq \eta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Betrachten wir noch die Wahrscheinlichkeit für $\epsilon = 1$ unter der Bedingung $\eta = 1$. Diese ist

$$W_\theta(\epsilon = 1|\eta = 1) = \frac{p_\theta(1,1)}{p_\theta(1,1) + p_\theta(-1,1)} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Also gilt $W_\theta(\epsilon = 1|\eta = 1) = W_\theta(\epsilon = 1)$ genau dann, wenn $\theta = \pi/2$. Insbesondere gilt für $\theta = 0$, also $a = b$, $W_\theta(\epsilon = 1|\eta = 1) = 0$, die strikte Antikorrelation.

3 Kolmogorov-Simulation

Nun führen wir für die quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten folgende Kolmogorov-Simulationen ein.

Definition 1. *Sei $E_1 = \{\tilde{a} \otimes id : a \in \mathbb{S}^2\}$ und $E_2 = \{id \otimes \tilde{a} : a \in \mathbb{S}^2\}$. Dann gilt für $(A, B) \in E_1 \times E_2$, dass $[A, B] = 0$ und $\sigma(A) = \sigma(B) = \{1, -1\}$. Sei (Ω, W) ein endlicher W-raum. Eine Abbildung*

$$C : E_1 \times E_2 \to Abb\,(\Omega : \{1, -1\} \times \{1, -1\}) \;\; mit\; W_\rho^{A,B} = W_{C(A,B)}$$

für alle $(A, B) \in E_1 \times E_2$ heißt kontextuelle Kolmogorov-Simulation der Spinkorrelation des Zustands ρ.

Für $a, b \in \mathbb{S}^2$ schreibt man

$$C\left(\tilde{a} \otimes id, id \otimes \tilde{b}\right) = (f_{a,b}, g_{a,b}) \text{ mit } f_{a,b}, g_{a,b} : \Omega \to \{1, -1\}$$

Sind die beiden Gebiete, in denen die Messungen von A und B vorgenommen werden, weit voneinander entfernt, darf die Wahl von b auf den Wert der Messung von A keinen Einfluss haben. Für die Funktionen der Kolmogorov-Simulation heißt das $f_{a,b}(\omega) = f_{a,b'}(\omega)\,\forall\, b, b' \in \mathbb{S}^2$ (analog für g).

Definition 2. *Sei C eine kontextuelle Kolmogorov-Simulation der Spinkorrelation von ρ. Existiert für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ ein Paar von Funktionen $(f_a, g_b) : \Omega \to \{1, -1\} \times \{1, -1\}$, sodass*

$$C\left(\tilde{a} \otimes id, id \otimes \tilde{b}\right) = (f_a, g_b)$$

für alle $a, b \in \mathbb{S}^2$ gilt, dann heißt C lokale Kolmogorov-Simulation der Spinkorrelation von ρ.

Für den Spinsinglett-Zustand hat eine solche lokale Kolmogorov-Simulation die spezielle Eigenschaft $f_a = -g_a$ (cf. unten), die wir uns im folgenden Satz zu Nutze machen.

Satz 3. *Ist C eine lokale Kolmogorov-Simulation der Spinkorrelation des Spinsinglett-Zustands auf dem endlichen W-raum (Ω, W), dann gibt es für jedes $a \in \mathbb{S}^2$ eine Funktion $f_a : \Omega \to \{1, -1\}$, sodass für alle $a, b \in \mathbb{S}^2$ gilt*

$$\mathbb{E}\left(f_a f_b\right) = a \cdot b.$$

Beweis. Ist ρ der Spinsinglett-Zustand, ist für $a = b$ die Verteilung auf $\{(1,-1),(-1,1)\}$ lokalisiert, d.h.

$$W\left(\{\omega : f_a(\omega) = -g_a(\omega)\}\right) = 1$$

und damit $f_a = -g_a$ fast überall. Also muss für eine lokale Kolmogorov-Simulation der Spinkorrelation des Spinsinglett-Zustands gelten

$$W_\rho^{A,B}(X) = W\left(\{\omega : (f_a(\omega), -f_b(\omega)) \in X\}\right)$$

mit $X \subset \{1,-1\} \times \{1,-1\}$. Nun schreiben wir das Produkt der Operatoren A, B in Form ihrer spektralen Projektionen, also

$$AB = \tilde{a} \otimes \tilde{b} = \sum_{\epsilon,\eta=\pm 1} \epsilon\eta P_\epsilon^A P_\eta^B,$$

und können damit einen Zusammenhang zwischen der quantenmechanischen Korrelationsfunktion und den Erwartungswerten der Kolmogorov-Simulation herstellen, nämlich so:

$$\begin{aligned} -a \cdot b =& Sp(AB\rho) = \sum_{\epsilon,\eta=\pm 1} \epsilon\eta\, Sp\left(P_\epsilon^A P_\eta^B \rho\right) \\ =& \sum_{\epsilon,\eta=\pm 1} \epsilon\eta\, W\left(\{\omega : f_a(\omega) = \epsilon, -f_b(\omega) = \eta\}\right) \\ =& -\mathbb{E}\left(f_a f_b\right) \end{aligned}$$

□

4 Bells Theorem

Damit bewaffnet können wir nun Bells Theorem formulieren und den entsprechenden Beweis führen.

Satz 4. *Die Spinkorrelation des Singlettzustandes ρ besitzt keine lokale Kolmogorov-Simulation. D.h. es existiert kein endlicher W-raum (Ω, W) mit Funktionen $f_a, g_a : \Omega \to \{1,-1\}$ für alle $a \in \mathbb{S}^2$, sodass für alle $a, b \in \mathbb{S}^2$ und für alle $\epsilon, \eta \in \{1,-1\}$*

$$W\left(\{\omega \in \Omega : f_a(\omega) = \epsilon,\ g_b(\omega) = \eta\}\right) = \frac{1 - \epsilon\eta\, a \cdot b}{4} = W_\rho^{A,B}\left(\{\epsilon, \eta\}\right).$$

Um den Beweis führen zu können brauchen wir zunächst noch Bells Ungleichung, die auch Bell selbst für seinen ursprünglichen Beweis verwendete.

Satz 5. *Sei* (Ω, W) *ein endlicher W-raum mit Funktionen* $f, g, h : \Omega \to \{1, -1\}$*. Dann gilt*

$$|\mathbb{E}(fg) - \mathbb{E}(fh)| \leq 1 - \mathbb{E}(gh).$$

Beweis. Wir benützten die Dreiecksungleichung für den Erwartungswert, dessen Linearität, $g^2 = 1$ und $1 - gh \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(fg) - \mathbb{E}(fh)| =& |\mathbb{E}\left(f(g-h)\right)| \leq \mathbb{E}\left(|f(g-h)|\right) = \mathbb{E}\left(|(g-h)|\right) \\ =& \mathbb{E}\left(|g(1-gh)|\right) = \mathbb{E}\left(|1-gh|\right) = 1 - \mathbb{E}(gh) \end{aligned}$$

□

Damit können wir nun Bells Theorem beweisen.

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{S}^2$. Gibt es eine lokale Kolmogorov-Simulation der Spinkorrelation des Singlett-Zustands, dann gilt für die Funktionen f_a, f_b, f_c einen solchen Bells Ungleichung, also

$$|\mathbb{E}(f_a f_b) - \mathbb{E}(f_a f_c)| \leq 1 - \mathbb{E}(f_b f_c).$$

Daraus folgt mit dem Ergebnis von Satz 3, $\mathbb{E}(f_x f_y) = x \cdot y \, \forall \, x, y \in \mathbb{S}^2$,

$$|a \cdot b - a \cdot c| \leq 1 - b \cdot c$$

Wir wählen nun die drei Vektoren koplanar und so, dass $a \cdot c = \cos\theta$ und $a \cdot b = b \cdot c = \cos(\theta/2)$. Damit wird die Ungleichung zu

$$|\cos(\theta/2) - \cos\theta| \leq 1 - \cos(\theta/2)$$

und Abb. 2 zeigt uns, dass diese für alle $\theta \in (0, \pi)$ verletzt und an den Randpunkten gerade gesättigt ist. D.h. eine lokale Kolmogorov-Simulation der Spinkorrelation des Singlett-Zustands ist ausgeschlossen. □

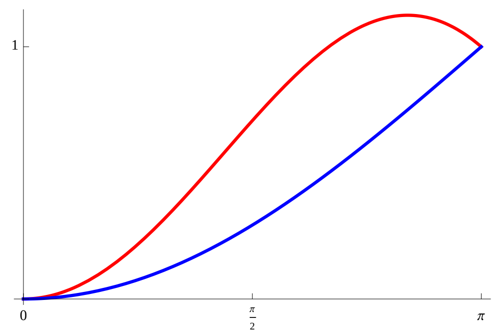

Abbildung 2: Verletzung der Bell-Ungleichung (LS rot, RS blau)