Die Schwarzschild-Metrik

Seminar Mathematische Physik vom 19. Mai 2010
Laurin Ostermann

1 Einleitung

Die Schwarzschild-Metrik (in der engl. Literatur *Schwarzschild solution*) war die erste bekannte analytische Lösung der Einstein-Gleichungen,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Sie wurde vom deutschen Astronomen und Physiker K. Schwarzschild[1] 1916 - kurz nach Einsteins Veröffentlichung - publiziert und stellt die Vakumlösung ($T_{\mu\nu} = 0$) im Außenraum einer sphärisch symmetrischen, stationären Massenverteilung dar.

2 Voraussetzungen aus der Differentialgeometrie

Dieser Abschnitt soll (nur) einen kurzen Abriss über die zur Berechnung der Schwarzschild-Metrik notwendigen Objekte aus der Differentialgeometrie geben und deren Notation einführen, jedoch keine ausführlichen Herleitungen und Beweise präsentieren. Als ausführliche Literatur lässt sich z.B. [2] heranziehen.

2.1 Metrik

Die Lorentz-Transformationen L^{μ}_{ν} (Poincaré-Gruppe) in der speziellen Relativitätstheorie sind jene Transformationen $(x')^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, die die Größe

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\vec{x}^2,$$

wobei $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $c = 1$ und die Vorzeichenkonvention in Kongruenz mit [1] gewählt ist, invariant lassen. Mit Hilfe der Minkowski-Metrik

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

lässt sich $\mathrm{d}s^2$ als

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu}$$

schrieben. In der speziellen Relativitätstheorie (flacher Raum) hat die Metrik in jedem Punkt des Raumes den selben Wert. Im Falle von gekrümmten Geometrien kann der lokale Ausdruck des metrischen Tensors (der Metrik) $g_{\mu\nu}$ von den Raumpunkten abhängen und auch nicht-diagonle Terme haben.

[1] Karl Schwarzschild (* 9.10.1873, †11.05.1916), [3]

2.2 Christoffel-Symbole

Die Christoffel-Symbole sind eine Funktion der Ableitungen der Metrik und wie folgt definiert:

$$\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\partial_\kappa g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\kappa} - \partial_\rho g_{\kappa\lambda} \right) = \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa}. \tag{2}$$

Man führt sie ein, um eine Ableitung D_α (kovariante Ableitung) bilden zu können, sodass die Objekte $D_\alpha A^\beta$ und $D_\alpha A_\beta$ unter allgemeinen Koordinatenwechseln ihre Tensoreigenschaft behalten.

2.3 Riemann- und Ricci-Tensor

Aus den Christoffel-Symbolen und deren Ableitungen lässt sich der Riemann'sche Krümmungstensor

$$R^{\mu}_{\kappa\lambda\alpha} = \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\kappa\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda} \tag{3}$$

bilden. Durch Kontraktion lässt sich aus dem Riemann-Tensor der Ricci-Tensor gewinnen, der in den Einstein-Gleichungen auftritt,

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}. \tag{4}$$

Durch weitere Kontraktion bzw. voriges Index-Ziehen ergibt sich der Krümmungsskalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} \tag{5}$$

3 Herleitung der Schwarzschild-Metrik

Nachdem nun alle benötigten differentialgeometrischen Objekte kurz beleuchtet wurden, können wir uns an die Berechnung der Schwarzschild-Metrik wagen.

Wir wollen die Metrik im Außenraum einer rotationssymmetrischen, stationären Massenverteilung berechnen, wählen also Kugelkoordinaten

$$x^\mu = (t, r, \theta, \varphi) \,.$$

Die postulierte Invarianz unter Raum- und Zeitspiegelung impliziert dann, dass nur die Diagonalterme der Metrik von Null verschieden sein dürfen (Es dürfen in den Linienelementen nur quadratische Terme der Koordinaten vorkommen, da diese unter Spiegelung $x^\mu \to -x^\mu$ invariant sind). D.h. wir können für das infinitesimale Linienelement den Ansatz

$$\mathrm{d}s^2 = -A\mathrm{d}t^2 + B\mathrm{d}r^2 + Cr^2\mathrm{d}\theta^2 + Dr^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2$$

mit $A, B, C, D : [0, \infty] \to \mathbb{R}_{>0}$ Funktionen von r wählen, wobei wir

$$A(r) = B(r) = C(r) = D(r) = 1 \qquad \text{für } r \to \infty$$

fordern. Weit entfernt von der Masse, die die gekrümmte Metrik induziert, soll diese also in die flache Minkowski-Raumzeit übergehen. Die geforderte Rotationssymmetrie des Problems impliziert weiters

$$C(r) = D(r) \qquad \forall\, r.$$

Wir wählen nun eine Reparametrisierung der Radialkoordinate

$$\tilde{r} = \sqrt{C(r)}\, r \text{ womit } Cr^2 = \tilde{r}^2.$$

Mit

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\mathrm{d}r} = \sqrt{C(t)} + \frac{r}{2\sqrt{C(r)}} \frac{\mathrm{d}C(r)}{\mathrm{d}r}$$

wird

$$B\mathrm{d}r^2 = B \left(\sqrt{C(t)} + \frac{r}{2\sqrt{C(r)}} \frac{\mathrm{d}C(r)}{\mathrm{d}r} \right)^{-2} \mathrm{d}\tilde{r}^2 = \tilde{B}\mathrm{d}\tilde{r}^2$$

und wir erhalten für das Linienelement (von nun an ohne Tilde)

$$\mathrm{d}s^2 = -A\mathrm{d}t^2 + B\mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \right).$$

Damit lassen sich nun die Christoffel-Symbole berechnen. Das könnten wir maschinell erledigen, indem wir die Definition der $\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}$ von oben anschreiben und diese, nachdem der Ansatz der Metrik ja gegeben ist, für alle μ, κ, λ ausrechnen. Sehr viele der $4^3 = 64$ Einträge in den Christoffel-Symbolen sind aber gleich null, daher entschließen wir uns für einen anderen Weg: Kennen wir alle Geodäten, parametrisiert durch σ,

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} \dot{x}^{\lambda} \dot{x}^{\kappa} = 0,$$

sind die Christoffel-Symbole durch diese eindeutig festgelegt. Geodäten sind jene Kurven, die den Raumzeit-Abstand extremal werden lassen. Damit ergibt sich die Variation zu

$$\partial \int g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}\sigma = 0$$

und wir können für unseren Fall

$$\partial \int \left(-A\dot{t}^2 + B\dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 \right) \right) \mathrm{d}\sigma = \partial \int F \mathrm{d}\sigma$$

anschrieben. Über die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich nun jene Kurven (Geodäten) finden, die die Variation des obigen Ausdrucks zum Verschwinden bringen. Wir haben also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} \tag{6}$$

und $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Punkt bezeichnet die Differentiation nach σ.

Für $\mu = 0$ haben wir damit:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(-2A\dot{t}\right) &= 0 \\
\ddot{t} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\dot{r}\right)\dot{t} &= 0 \\
\ddot{t} + \frac{A'}{A}\dot{r}\dot{t} &= 0
\end{aligned}$$

Der Strich bezeichnet die Differentiation nach r. Für $\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(2B\dot{r}\right) &= -A'\dot{t}^2 + B'\dot{r}^2 + 2r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) \\
2B\ddot{r} + 2B'\dot{r}^2 &= -A'\dot{t}^2 + B'\dot{r}^2 + 2r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) \\
0 &= \ddot{r} + \frac{A'}{2B}\dot{t}^2 + \frac{B'}{2B}\dot{r}^2 - \frac{r}{B}\dot{\theta}^2 - \frac{r}{B}\sin^2\theta\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Für $\mu = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(2r^2\dot{\theta}\right) &= 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\
2r^2\ddot{\theta} + 4r\dot{r}\dot{\theta} &= 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\
\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 &= 0
\end{aligned}$$

Und für $\mu = 3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(2r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right) &= 0 \\
\left(2r^2\sin^2\theta\right)\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\left(2r\dot{r}\sin^2\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\right) &= 0 \\
\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} &= 0
\end{aligned}$$

Aus den jeweils letzten Zeilen lassen sich die Christoffel-Symbole nun durch Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Geodätengleichung ermitteln. Dabei ist zu beachten, dass es für die gemischten Terme ($\dot{x}^\kappa\dot{x}^\lambda$) zwei Christoffel-Symbole ($\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$ und $\Gamma^\mu_{\lambda\kappa}$) gibt, die den selben Wert haben, weshalb sich die Koeffizienten dieser Terme auf die beiden aufteilen. Die Tabelle zeigt alle nichtverschwindenden Christoffel-Symbole. Alle andren $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$ sind null.

μ	κ	λ	$\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$	μ	κ	λ	$\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$
0	1	0	$A'/2A$	2	1	2	$1/r$
0	0	1	$A'/2A$	2	3	3	$-\sin\theta\cos\theta$
1	0	0	$A'/2B$	3	1	3	$1/r$
1	1	1	$B'/2B$	3	3	1	$1/r$
1	2	2	$-r/B$	3	2	3	$\cot\theta$
1	3	3	$(-r/B)\sin^2\theta$	3	3	2	$\cot\theta$
2	2	1	$1/r$				

Wir führen nun die Größe

$$\sqrt{-g} = r^2 |\sin\theta| \sqrt{AB}$$

als Wurzel aus $-g = -\det(g)$ der Metrik ein und beobachten

$$\partial_\beta \log \sqrt{-g} = \Gamma^\mu_{\mu\beta},$$

nämlich

$$\begin{aligned} \partial_1 \log \sqrt{-g} = \Gamma^\mu_{\mu 1} &= \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \\ &= \partial_r \log(r^2 |\sin\theta| \sqrt{AB}) \\ &= 2\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{1}{AB}\left(A'B + AB'\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_2 \log \sqrt{-g} = \Gamma^\mu_{\mu 2} &= \cot\theta \\ &= \partial_\theta \log |\sin\theta| \\ &= \frac{1}{|\sin\theta|}\Theta\left(\sin\theta\right)\cos\theta = \cot\theta, \end{aligned}$$

wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Als nächstes kümmern wir uns um eine Vereinfachung der Einstein-Gleichungen im Vakuumfall ($T_{\mu\nu} = 0$). Dazu multiplizieren wir diese mit der inversen Metrik und erhalten

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right) = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}.$$

Daraus ergibt sich mit $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R$ und $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\mathbf{1}_4 = 4$

$$R = -\kappa T^\mu_\mu$$

bzw.

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha_\alpha\right)$$

und im Vakuumfall

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Nun schreiben wir den Ricci-Tensor als Kontraktion des Riemann-Tensors an und erhalten

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \\ &= -\partial_\mu \partial_\nu \log\sqrt{-g} + \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma \log\sqrt{-g} \end{aligned}$$

Für $\mu = \nu = 0$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}R_{00} &= \partial_1 \Gamma^1_{00} - 2\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{00}\partial_1 \log\sqrt{-g'} \\ &= \left(\frac{A'}{2B}\right)' - \frac{A'^2}{2AB} + \frac{A'}{2B}\left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2B}\left(A'' - \frac{A'B'}{2B} - \frac{A'^2}{2A} + \frac{2A'}{r}\right) = 0,\end{aligned}$$

für $\mu = \nu = 1$ analog

$$\begin{aligned}R_{11} =& -\partial_1^2 \log\sqrt{-g} + \partial_1\Gamma^1_{11} - \Gamma^0_{01}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} \\ & - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{31} + \Gamma^1_{11}\partial_1 \log\sqrt{-g} \\ =& \frac{1}{2A}\left(-A'' + \frac{A'B'}{2B} + \frac{A'^2}{2A} + \frac{2AB'}{Br}\right) = 0\end{aligned}$$

Aus

$$2B\,R_{00} + 2A\,R_{11} = 2\left(\frac{A'}{r} + \frac{AB'}{rB}\right) = 0$$

erhalten wir

$$\frac{2}{rB}\,(AB)' = 0$$

und damit

$$AB = \text{const.},$$

wobei der Wert der Konstante über die Forderung $A(r) = B(r) = 1$ für $r \to \infty$ bestimmt wird, womit wir

$$B = \frac{1}{A}$$

für den Zusammenhang zwischen A und B feststellen. Nun betrachten wir $R_{\mu\nu}$ für $\mu = \nu = 2$:

$$\begin{aligned}R_{22} =& -\partial_2^2 \log\sqrt{-g} + \partial_1\Gamma^1_{22} - 2\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} \\ & - \Gamma^3_{32}\Gamma^3_{32} + \Gamma^1_{22}\partial_1 \log\sqrt{-g} \\ =& -\partial_\theta \cot\theta - \left(\frac{r}{B}\right)' + \frac{2}{B} - \cot^2\theta \\ & - \frac{r}{B}\left(\frac{2}{r} + \frac{(AB)'}{2AB}\right) = 0\end{aligned}$$

Mit $(AB)' = 0$ von oben wird dieser Ausdruck zu

$$\left(\frac{r}{B}\right)' = -\left(\partial_\theta \cot\theta + \cot^2\theta\right) = 1$$

Durch Integration erhalten wir

$$\frac{r}{B} = r - r_s$$

(r_s ist die Integrationskonstante)und damit für A und B

$$A = 1 - \frac{r_s}{r} \qquad B = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}.$$

Nun können wir die Schwarzschild-Metrik als

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin\theta \mathrm{d}\varphi^2\right)$$

anschreiben, wobei sich die Integrationskonstante über die Forderung, dass die das 00-Element der Metrik im Fernfeld in das klassische Gravitationspotential übergehen soll, bestimmen lässt. Die Konstante wird dann als Schwarzschild-Radius bezeichnet.

In weiterer Folge kann man durch geschickte Koordinatentransformationen die Singularität an der Stelle $r = r_s$ in der Metrik heben.

Die Schwarzschild-Metrik kann verwendet werden um die Lichtablenkung im Gravitationsfeld oder die Periheldrehung des Merkur zu betrachten.

Literatur

[1] G. 't Hooft, An Introduction to General Relativity (Utrecht, 1998)

[2] E. Kreyszig, Differentialgeometrie (Leipzig, 1957)

[3] `http://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild`