

Notenlesen für Physiker

Seminar Mathematische Physik, 24. Jänner 2013
Laurin Ostermann

Zusammenfassung

Der vorliegende Text beschäftigt sich mit der Fragestellung wie einem Notensymbol, das ein Musiker auf seinem Notenblatt liest eine Frequenz und eine Länge zugeordnet sind. Ein historisch motivierter Abriss über unterschiedliche Stimmungssysteme und den physikalischen Ursprung von Tonleitern bringt uns zur heute geläufigen gleichstufigen Stimmung. Des weiteren erläutern wir das abendländische Notationssystem, dessen Grundlage die Klaviatur eines Tasteninstrumentes bildet. Der Text schließt mit einer Erklärung der Festlegung von Tonlängen in selbigem Notationssystem.

1 Stimmungen

Die Stimmung eines Instruments bezeichnet die relativen Frequenzverhältnisse der auf dem Instrument spielbaren Töne zu einem (nicht durch die Stimmung festgelegten) Grundton oder Stimmton, wie z.B. dem Kamerton a' (440 Hz). Bei Blasinstrumenten ergeben sich selbige durch die Geometrie als Naturtonreihe (Grundfrequenz und Obertöne), bei Saiten- oder Tasteninstrumenten muss jede Tonhöhe einzeln entsprechend des gewünschten Stimmsystems (beim Spielen durch den Musiker oder durch einen Stimmvorgang vor dem Spielen) eingestimmt werden.

Beschäftigen wir uns zunächst damit, wie man überhaupt auf die Idee verfallen kann, Töne in einer Tonleiter anordnen zu wollen.

1.1 Historischer Einstieg und Pythagoräische Stimmung

Die früheste mathematisch theoretische Auseinandersetzung mit Musik wird Pythagoras zugeschrieben. Er war angeblich der erste, der die auf einer schwingenden Saite möglichen Töne ihren Frequenzen nach zu einer Tonleiter anordnete. Inspiriert zu dieser experimentellen und theoretischen Auseinandersetzung wurde er der Legende [1] nach beim Vorbeigehen an einer Schmiede, in der vier Meister mit unterschiedlich schweren Hämmern auf Werkstücke einschlugen. Das unterschiedliche (angeblich in rationalen Verhältnissen stehende) Gewicht der Hämmer war seiner Meinung nach für das Entstehen der unterschiedlichen Frequenzen verantwortlich, was uns heute doch sehr unplausibel vorkommt. Wahrscheinlicher erscheint dagegen die Vermutung, dass Pythagoras seine Untersuchungen mit einem Monochord (gespannte Saite mit verstellbarem Steg über einem Resonanzkasten) anstellte. [2]

Unabhängig davon, wie selbige nun tatsächlich entstand, ist die Pythagoräische Stimmung durch das aufeinander Schichten von Quinten gegeben. Diese ergeben sich, indem eine schwingende Saite der Länge L (Grundfrequenz $\nu_0 = c/2L$) bei $x = L/3$ festgehalten wird um somit die Frequenz $\nu_5 = (3c)/(2L)$ über dem ersten Oberton (Frequenz $\nu_g = c/L$) zu erzeugen. Dieses Spiel wiederholt man noch vier Mal und transponiert durch entsprechendes Ver- $2n$ -fachen der Saitenlänge jeweils die neue Frequenz wieder in die Oktave des ersten Obertons, sodass für alle so gewonnenen Frequenzen ν_i

$$\nu_g < \nu_i < 2\nu_g$$

gilt. So erhält man die fünf Intervalle und Frequenzverhältnisse Quint ($3/2$), Sekund ($9/8$), Sext ($27/16$), Terz ($81/64$) und Sept ($243/128$) über dem Grundton. Die Quart erhält man in der Pythagoräischen Stimmung durch Anwenden des oben genannten Verfahrens in die Gegenrichtung. Ihre Frequenz ergibt sich dann zu $\mu_4 = 4\nu_g/3$. Würde man das Verfahren auch für die Quart konsequent anwenden ergäbe sich das Verhältnis $177147/131072 \approx 1.3516$ zum Grundton. Die Terzen der Pythagoräischen Stimmung sind im Vergleich zur reinen großen Terz (jener aus der Obertonreihe $\nu_3/\nu_g = 5/4$) höher und klingen daher schärfer. Zudem lässt sich mit diesem Konzept keine geschlossene Reihe von Tönen erreichen: nach zwölfmaliger Anwendung oben beschriebenen Verfahrens landet man nämlich nicht wieder (modulo sieben Oktaven) am Grundton, sondern leicht ($\nu_{g'}/\nu_g \approx 1.014$, in heutiger Denkweise einen Achtelton) darüber. Die (triviale) Lösung für dieses Problem war, die letzte der zwölf Quinten entsprechend zu vermindern, was klanglich recht eigentümliche Auswirkungen hat und zum Begriff der 'Wolfsquint' führte, da dieses Intervall angeblich 'heult wie ein Wolf'.

Hören wir im Tonbeispiel 1 eine 'Dur-Tonleiter' einen 'Dur-Dreiklang', wie sie uns Pythagoras vorgespielt hätte und die Wolfsquint im Vergleich zur reinen Quint (Grundton - reine Quint - Grundton - Wolfsquint) und diese dann statt der reinen Quint im Dreiklang.

Die Pythagoräische Stimmung war maßgeblich in der antiken Musiktradition und zog sich bis ins Mittelalter durch.

1.2 Reine und gleichstufige Stimmung

Mit der zunehmenden kompositorischen Verwendung der Mehrstimmigkeit in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts wurde die Pythagoräische Stimmung durch die reine Stimmung abgelöst, die neben reinen Oktaven und reinen Quinten auch die Terz ($\nu_3/\nu_g = 5/4$, cf. oben) rein stimmt. Eine solche Stimmung lässt sich auf Grund der Relation zur Obertonreihe auf Streich- und Blasinstrumenten sehr gut umsetzen und wird in klassischen Ausbildungen heute noch als ideal angesehen. Auch Chorsänger werden dahin gehend ausgebildet, Akkorde rein zu intonieren.

Auf Tasteninstrumenten mit üblicherweise zwölf Tönen (Halbtönen) pro Oktave, die jeder Taste eine (etwa wie beim Klavier über die Saitenlänge) festgelegte Frequenz zuordnen, lässt sich die reine Stimmung nicht für alle Tonarten konsistent umsetzen. Da ein Ton nur relativ zu einem Grundton seinen Kontext erhält, müsste ein und die selbe Taste z.B. gleichzeitig reine Terz und reine Quint sein, was sich nicht realisieren lässt (Eine Quint über der Sext ergibt eine Terz und die Diskrepanz $81/64 \neq 5/4 = 80/64$).

Es muss also ein Kompromiss gefunden werden, wenn man auf dem selben Instrument in allen Tonarten spielen möchte. Beginnend im 17. Jahrhundert entstanden zu dieser Problematik einige Lösungsansätze wie die mitteltönige Stimmung, wohltemperierte Stimmungen [4] (Bach), in denen alle Tonarten akzeptabel spielbar sind, welche aber unterschiedliche Halbtonverhältnisse aufweisen (Werkmeister-Stimmung, Kimberger-Stimmung, Valotti-Stimmung) und schließlich die ultima ratio, die gleichstufige Stimmung, die keine Tonart speziell auszeichnet, dafür aber auch außer der Oktave keine reinen Intervalle mehr kennt. Jeder Halbtonschritt hat in dieser Stimmung das Frequenzverhältnis

$$\frac{\nu_h}{\nu_g} = \sqrt[12]{2} \approx 1.059$$

Oft findet man in musiktheoretischer Literatur auch die logarithmische Skala *Cent*, wobei 100 Cent gerade einem Halbton in der gleichstufigen Stimmung entsprechen und eine Oktave (unabhängig vom Stimmungssystem immer) 1200 Cent umfasst. Ein gegebenes Frequenzverhältnis $\nu_2/\nu_1 = \lambda$ erhält in dieser Skalierung also den Wert

$$\frac{\ln \lambda}{\ln 2} \cdot 1200 \text{ Cent.}$$

Hören wir im Tonbeispiel 2 nun eine Dur-Tonleiter in der gleichstufigen Stimmung, gefolgt von einem Dur-Dreiklang.

2 Notensystem

Frühe Kulturen verwendeten unterschiedlichste Zeichen und Konzepte, um musikalische Abläufe schriftlich festzuhalten. Seit dem 12. Jahrhundert und vor allem in der abendländischen Musik setzte sich ein Notationssystem, das aus fünf parallelen horizontalen Linien besteht und Noten(-punkten) auf oder zwischen selbigen Platz bietet, durch. Durch die Wahl eines Notenschlüssels, der am Anfang jeder Notenzeile steht wird damit jedem Ton eine vertikale Position im Notensystem zugeordnet. Töne, die innerhalb der Linien nicht abgebildet werden können, werden mittels Hilfslinien über oder unter der Notenzeile notiert.

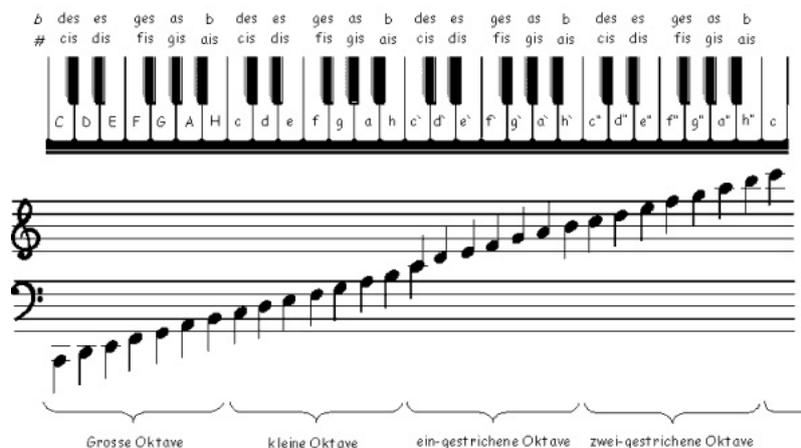


Abbildung 1: Notensystem und Klaviatur

2.1 Tonhöhe

Das europäische Notensystem orientiert sich sehr stark an der Klaviatur von Tasteninstrumenten. Für die weißen Tasten existiert im Wesentlichen (bei üblicher Verwendung von Bass- und Violinschlüssel) eine eindeutige Zuweisung von Taste zu vertikaler Position im Notensystem bzw. Tonnamen. Diese Zuweisung ist in Abb. 1 angeführt. Dabei sitzt der Ton *g'* auf der oberen Notenzeile auf der zweiten Linie (man zählt von unten), wobei der Bauch des Violinschlüssels gerade selbige umschlingt. Der Ton *f* (eine Oktav plus eine große Sekund darunter) befindet sich auf der vierten Linie der unteren Zeile, welche gerade von den beiden Punkten des Bassschlüssels eingeschlossen wird.

Beinahe sofort fällt uns auf, dass der Abstand, den ein *e* und ein *f* zueinander haben, in der grafischen Notation der selbe ist, wie jener zwischen einem *c* und einem *d*, obwohl letzteres einem Ganztonschritt (200 Cent), ersteres aber einem Halbtonschritt (100 Cent) entspricht. Das Notensystem zeichnet also die *C-Dur-Tonleiter* explizit aus. Weiters bemerken wir, dass wir auf diese Art und Weise die fünf schwarzen Tasten pro Oktave noch gar nicht adressieren konnten. Dies geschieht durch die Verwendung von Vorzeichen, Kreuz (\sharp) und Be (*b*), welche vor einem Notenkörper notiert, die entsprechende Note um einen Halbton erhöhen oder erniedrigen.

Um ein ganzes Stück, etwa in einer anderen Tonart (wie z.B. Es-Dur) übersichtlich notieren zu können, gibt es zudem das Konzept der Generalvorzeichen, die nach dem Notenschlüssel am Anfang jeder Zeile notiert werden und somit die zugehörigen Noten für das gesamte Stück um einen Halbton verschieben. Will man die Wirkung eines Vorzeichens wieder aufheben, schreibt man vor die Note ein sog. Auflösungszeichen (\natural).



Abbildung 2: Notenwerte und Pausen

2.2 Tonlänge

Neben der Festlegung der Tonhöhe ist es aber selbstverständlich auch noch notwendig, die Länge eines Tones bzw. die Länge von Pausen zwischen Tönen in der Notation abzubilden. Dies geschieht relativ zu einem vorgegebenen Tempo durch die Verwendung von unterschiedlichen Notenkopfsymbolen, -hälsen und -fähnchen.

Eine typische Tempo-Angabe legt z.B. fest, wie viele Viertelnoten pro Minute gespielt werden. In der Klassik werden Tempoangaben meist verbal und dem Italienischen entlehnt angegeben (z.B. *adagio*) und es obliegt den Musikern oder dem Dirigenten diese Angabe zu interpretieren.

Die Länge einer Note wird als *Notenwert* bezeichnet. Abb. 2 zeigt eine ganze Note (vier Viertelnoten), eine halbe Note (zwei Viertelnoten), eine Viertelnote, eine Achtelnote, etc. und die entsprechenden Symbole für die Pausen. Ein Punkt hinter einer Note bewirkt die Verlängerung der Dauer der Note um die Hälfte der ursprünglichen Länge, eine punktierte Viertelnote entspricht also ihrer Länge nach einer Viertel- plus einer Achtelnote oder drei Achtelnoten. Natürlich existieren noch weitere Raster wie Triolen oder Quintolen, etc., auf deren Erklärung im Rahmen dieses Textes verzichtet wird.

Literatur

- [1] Nikomachos von Gerasa, Handbuch der Harmonielehre [übersetzt bei Heilmann] (2007)
- [2] L. Zhmud, Pythagoras and the Early Pythagoreans (2012)
- [3] F. Blume, Die Musik in Geschichte und Gegenwart (2001)
- [4] H. Kellertat, Zur musikalischen Temperatur: I. Johann Sebastian Bach und seine Zeit (1981)
- [5] M. Lindley, Stimmung und Temperatur (1987)